A ARITMÉTICA COMO RELAÇÕES DE IDEIAS: FREGE, KANT E HUME

ARITHMETICS AS RELATIONS OF IDEAS: FREGE, KANT AND HUME

Eric Bitencourt de Santana
UFSC
bitencourteric@hotmail.com

Resumo: O presente artigo tem caráter expositivo-argumentativo e almeja dois objetivos: assegurar, por meio de uma breve exegese de algumas passagens de David Hume, que a aritmética pode ser tomada somente como relação de ideias (analítica, na distinção kantiana dos juízos) e traçar pontos em comum entre a filosofia humeana e a filosofia de Gottlob Frege sobre os juízos aritméticos. Indiretamente, argumentarei a favor de uma compatibilização do pensamento humeano sobre a categoria dos juízos aritméticos com a posição fregeana da aritmética como *justificavelmente* analítica. Dividirei este trabalho em três seções: primeiramente, procurarei expor a posição de David Hume sobre a categoria dos juízos da aritmética e quais as possíveis interpretações dessa visão nas obras *A Treatise of Human Nature* (1739) e *An Enquiry concerning Human Understanding* (1748). Em um segundo momento, apresentarei a distinção kantiana entre juízos sintéticos e juízos analíticos e as respostas de Gottlob Frege apresentadas na obra *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884) à posição presente em *Prolegomena* (1783) de Immanuel Kant de que os juízos aritméticos são *sintéticos a priori*. Consequentemente, considerarei uma possível compatibilização entre o pensamento de Gottlob Frege e o de David Hume no que diz respeito aos juízos aritméticos.

Palavras-chave: Hume; Frege; Kant; Filosofia da Matemática;

Abstract: This article has two objectives: ensure that arithmetic can be taken as a relation of ideas (analytical, in the Kantian sense) and show commonalities between Hume's and Frege's philosophy of mathematics. I shall argue in favor of a compatibility between Hume's position about arithmetics' judgments category and what Frege calls "justifiably analytical". Firstly, I will show Hume's point of view about type of judgments and how can we understand this perspective in his *Treatise of Human Nature* (1739) and *An Enquiry concerning Human Understanding* (1748). Then, I will present the Kantian synthetic-analytical judgments distinction and Frege's perspective in *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884) in which he answers Immanuel Kant's whom calls arithmetic judgments are synthetic a priori in *Prolegomena* (1783). Finally, I shall consider a compatibility between both Hume and Frege's point of view regarding arithmetic judgments.

Keywords: Hume; Frege; Kant; Philosophy of Mathematics.

SANTANA, E. B. 2019. "A aritmética como relações de ideias: Frege, Kant e Hume". *Revista Estudos Hum(e)anos*, Volume 7, Número 2: 19-34

1. INTRODUÇÃO[1]

A matemática é comumente alvo de controvérsias que envolvem desde discussões ontológicas até discussões epistemológicas. Dentre elas, há uma discussão sobre a natureza dos juízos da aritmética e da geometria. Em particular, refiro-me à discussão epistemológica sobre os juízos da aritmética: quando alegamos que 2+2 = 4, a qual categoria este juízo pertence? Em Frege e Kant, o debate sobre os juízos aritméticos é central. Contudo, ao voltarmos um pouco ao debate epistemológico moderno parece não haver grandes considerações sobre os juízos da aritmética. É o que se nota, por exemplo, nas obras de David Hume. Não se encontra em Hume uma tentativa de oferecer uma resposta a uma questão como a seguinte: na distinção analítico-sintético, qual a categoria de conhecimento das proposições matemáticas no pensamento? Hume não oferece uma resposta a uma questão como essa como podemos confirmar na literatura e nos poucos trabalhos analisam o espaço da aritmética no pensamento humeano. Este trabalho tentará responder essa questão e contribuir para o preenchimento dessa pequena lacuna na literatura sobre David Hume, ainda que essa contribuição seja ambiciosa em uma discussão de poucas páginas. Para tanto, partirei do ponto de que, para Hume, as únicas categorias do conhecimento humano são as *relações de ideias* e as *questões de fato* (EHU 4.1.1). Além disso, pretendo estabelecer um paralelo entre o pensamento humeano e o pensamento fregeano sobre os juízos aritméticos.

Neste trabalho de caráter expositivo-argumentativo procurarei portanto, alcançar dois objetivos: em primeiro lugar, assegurar que podemos interpretar a aritmética em David Hume como pertencendo às relações de ideias e, nesse sentido, podendo ser classificada como analítica. Em segundo lugar, mostrar que essa consideração está de acordo com a posição de Gottlob Frege no seu debate com Kant sobre a categoria dos juízos aritméticos. Espero com isso defender que o pensamento humeano acerca dos juízos aritméticos é compatível com a visão fregeana sobre a aritmética, no sentido de ser *justificavelmente* analítica, isto é, demonstrativamente certa.

Em vista disso, dividirei este artigo em três grandes partes. Num primeiro momento, farei uma exegese de duas importantes obras de David Hume com o intuito de destacar

[1] Agradeço imensamente ao professor Jaimir Conte (UFSC) pela revisão detalhada do trabalho e pelas sugestões ao texto. Destaco também que este trabalho foi realizado durante minha pesquisa de Iniciação Científica na área de Bioética com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, o CNPq.

passagens que ilustram o tratamento que Hume oferece sobre os juízos aritméticos. Minha hipótese é que é possível interpretar a posição de Hume como sendo uma posição favorável a uma aritmética analítica, diferentemente da interpretação defendida por Atkinson (1960) em seu artigo *Hume on Mathematics.* Em uma segunda parte, procurarei compatibilizar essa interpretação com o que sustenta Frege. Procurarei apresentar brevemente o debate suscitado por Frege diante da posição de Kant com relação à categoria dos juízos da aritmética. Em seguida apresentarei em que sentido Frege e Hume podem ser compatibilizados e até onde vai a concordância relativamente ao pensamento de ambos. Espero, no final deste artigo, sustentar que podem ser estabelecidos pontos comuns entre as posições de Frege e Hume sobre a categoria dos juízos da aritmética.[2]

2. HUME, KANT E A ARITMÉTICA

Iniciarei com a apresentação de uma famosa passagem de David Hume que abre a seção 4 do *Enquiry concerning Human Understanding* (EHU 4.1.1).[3] Nela, Hume divide todo o conhecimento humano em duas categorias: *questões de fato* e *relações de ideias:*

> Todos os objetos da razão ou investigação humanas podem ser naturalmente divididos em dois tipos, a saber, *relações de ideias* e *questões de fato*. Do primeiro tipo são as ciências da geometria, *álgebra e aritmética*, e, em suma, toda afirmação que é intuitiva ou demonstrativamente certa. Que o quadrado da hipotenusa é igual ao quadrado dos dois lados é uma proposição que expressa uma relação entre essas grandezas. Que três vezes cinco é igual à metade de trinta expressa uma relação entre esses números. Proposições desse tipo *podem ser descobertas pela simples operação do pensamento, independentemente do que possa existir em qualquer parte do universo*. Mesmo que jamais houvesse existido um círculo ou triângulo na natureza, as verdades demonstradas por Euclides conservariam para sempre sua certeza e evidência (EHU 4.1.1, itálico nosso).

Logo neste trecho, pode-se observar que Hume afirma claramente que a aritmética é relação entre ideias (logo, ela não seria fruto também do princípio da cópia) e que tais relações podem ser descobertas pela simples operação do pensamento. Esse processo do pensamento pode ser simplesmente interpretado como um ato psicológico que não recorre à experiência. Se isso for verdade, então os juízos aritméticos ocorrem *a priori* e, portanto,

[2] Entendo que a geometria para Hume faz parte da matemática, mas ela não é fruto puro das relações de ideias. Mesmo assim, caso seja necessário, neste trabalho utilizarei os termos “aritmética” e “matemática” como sinônimos, ainda que esse tratamento não esteja de acordo com o que Hume também considera como matemática.

[3] A partir daqui, utilizarei abreviações para as obras de Hume que mencionarmos.

pertencem à categoria dos juízos analíticos. A interpretação de que Hume sustenta uma matemática analítica, incluindo a geometria, pode ser bem fundada com essa citação. Entretanto, isso não parece ser um consenso, mesmo tomando como base a sua obra, o *EHU*. É importante apresentarmos, portanto, interpretações alternativas e contrárias ao que pretendemos defender aqui.

Na literatura, é possível perceber que não existem muitos trabalhos que descrevem ou analisam qual o lugar da matemática, à luz da distinção *analítica* ou *sintética,* da perspectiva de Hume. Não obstante, dedicarei um momento para apresentar os termos com os quais lidarei ao longo desse trabalho: *analítico, sintético* e *a priori* e *a posteriori* e como em geral são entendidos. Na obra *Prolegomena*, Kant distingue os juízos em dois, *analíticos* e *sintéticos,* termos já conhecidos desde a *Kritik der reinen Vernunft*. Os juízos do primeiro tipo, segundo ele, nada acrescem ao conhecimento humano devido a sua condição própria de serem *explicativos*; os juízos do segundo tipo aumentam o conhecimento dado e são *extensivos* (Kant, 1988, p. 24). A diferença mais considerável entre esses dois juízos pode ser ilustrada do seguinte modo:

> Os juízos analíticos nada dizem no predicado que não esteja já pensado realmente no conceito do sujeito [...] Quando digo: todos os corpos são extensos, não alarguei minimamente o meu conceito de corpo, mas analisei-o apenas, porque a extensão estava pensada realmente no conceito já antes do juízo, embora não expressamente mencionada; o juízo é, portanto, analítico. Pelo contrário, a proposição: alguns corpos são pesados, contém no predicado alguma coisa que não está verdadeiramente pensada no conceito geral de corpo, aumenta pois o meu conhecimento, ao acrescentar algo ao meu conceito; deve, portanto, chamar-se um juízo sintético (Kant, 1998, p. 25).

Os juízos analíticos, para Kant, são análogos às relações de ideias para Hume. Não se pode negar uma relação de ideia sem contradição, isto é, não podemos conceber a negação de uma proposição como 2+2 = 4 (Hume, 2004, p. 54). Suponhamos, por exemplo, que exista um solteiro que seja casado (a contraditória de que "todo solteiro é um não-casado"). Ora, tal juízo *analítico* nos induz a uma contradição. Em outras palavras, relações de ideias são análogas aos juízos analíticos de Kant. Entretanto, há uma grande divergência entre os itens que podem ser categorizados como analíticos ou sintéticos, especialmente no que diz respeito às verdades da aritmética (ou da geometria, por exemplo), que certamente é de nosso interesse. Voltaremos a este ponto a seguir, logo depois da apresentação do que são os juízos *a priori* e *a posteriori*.

Há ainda a distinção *a priori* e *a posteriori,* também apresentada por Kant, que deve ser esclarecida. Todo juízo analítico é *a priori* a partir do fato de que não há necessidade de recorrer à experiência para notarmos que tal juízo é verdadeiro (Kant, 1998, p. 25). Por outro lado, juízos sintéticos podem ser categorizados como *a posteriori*, equivalentes às *questões de fato* de Hume e *a priori,* categoria não apontada e não mencionada diretamente a qual para Kant encontram-se os juízos aritméticos. Para ilustrar: a origem dos juízos *sintéticos a posteriori* é empírica. A proposição “Araranguá é uma cidade cujo rio nasce a partir do encontro do rio Mãe Luzia e rio Itoupava” é certamente *sintética a posteriori*, pois a informação de que há dois rios distintos cuja junção forma o rio de Araranguá não está contida no termo “Araranguá”. Já a origem dos juízos *sintéticos a priori* é do fato de que existem afirmações as quais não podemos confirmar somente pela experiência e nem somente pela análise do *sujeito e do predicado.*[4] A essa categoria de juízos pertencem as afirmações matemáticas:

> Poder-se-ia, antes de mais, pensar que a proposição 7 + 5 = 12 é uma simples *proposição analítica*, *que resulta do conceito de uma soma de sete e de cinco, em virtude do princípio de contradição*. Mas, olhando de mais perto, descobre-se que o conceito da soma de 7 e 5 não contém mais nada senão a reunião de dois números num só, sem que se pense minimamente o que seja esse único número, que compreende os dois. O conceito de doze de nenhum modo está pensado pelo simples facto de eu pensar essa reunião de sete e de cinco, e, por mais que analise longamente o meu conceito de uma tal soma possível, não encontrarei, no entanto, aí o número doze. É preciso ultrapassar estes conceitos, recorrer à *intuição* que corresponde a um dos dois números, por exemplo, os seus cinco dedos ou (como Segter na sua aritmética) cinco pontos, e assim acrescentar, uma após outra, as unidades do cinco dado pela *intuição* ao conceito de sete (Kant, 1998, p. 27, itálico nosso).

Aqui encontra-se uma posição determinante para este trabalho: os juízos matemáticos para Kant são todos *sintéticos a priori*. Em outras palavras, não é possível que eles sejam produto das operações da mente, como defende Hume em uma das interpretações do *EHU*.

Como dissemos no início desta seção, David Hume considera a aritmética como operações da mente. Os juízos da ciência aritmética são dados como *relações de ideias* na medida em que não recorremos a qualquer experiência, ideia ou *intuição* para notar que três vezes cinco é igual à metade de trinta (EHU 4. 1. 1). Além disso, Hume aponta que

[4] A análise de sujeito e predicado é atribuída às proposições analíticas, as quais o sujeito está *contido* no predicado. Por exemplo: “Todo solteiro é não-casado”. A característica “solteiro” está contida no predicado “não-casado”.

ainda que não houvesse um triângulo real, ainda assim conheceríamos as verdades da geometria, ponto que será destacado nas considerações finais deste artigo. Há uma interpretação alternativa sobre os juízos analíticos na literatura de Hume. Atkinson (1960, p. 127), por exemplo, alega que a posição a qual os juízos da aritmética seriam *analíticos* é comumente atribuída ao filósofo devido ao trecho apresentado no *EHU,* como já destaquei. Embora essa posição seja atribuída a Hume à primeira vista, Atkinson reivindica que ela pode ser anacrônica ou até mesmo induzir-nos ao erro, o contrário do que pretendo sustentar aqui. Atkinson sugere uma nova interpretação acerca da posição de Hume: ainda que os juízos da aritmética sejam *a priori* e necessários, eles seriam em um sentido analítico mais amplo até mesmo do que o de Kant. Volto-me para a interpretação de Atkinson e farei uma exegese dos trechos da obra *Treatise of Human Nature* que se referem aos juízos aritméticos.

No *THN,* livro I, parte III, seção I, Hume afirma que as únicas relações filosóficas que mantém a certeza do conhecimento são as de *semelhança, contrariedade, graus de qualidade* e *proporções de quantidade* (T 1.3.1.2). Atkinson (1960, p. 128) chama essas relações de *necessárias*. As três primeiras relações são analisadas à primeira vista, intuitivamente, recorrendo somente ao seu domínio e não à demonstração. Tal intuição pode ser voltada também para as proposições matemáticas que nos informam *proporções* ou *números.* No *THN,* Hume considera que alguns desses juízos podem ser analisados somente pela intuição. Ao que tudo indica, quando falamos que *2 é menor que 1000,* é evidente pela nossa intuição que este é o caso, afirmaria Hume. Contudo, ao nos debruçarmos em teoremas mais complexos, como a seguinte propriedade de *limite* de uma função de variável real: $\lim_{x \to a} [f(x)+g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$ parece ser necessário lidar com demonstrações. Mas o que deve ficar claro aqui é que, mesmo não sendo intuitivo, o teorema não deixa de ser necessário, tanto neste caso quanto no exemplo anterior. Hume afirma: “Restam, portanto, a álgebra e a *aritmética* como as únicas ciências em que podemos elevar uma série de raciocínios a qualquer nível de complexidade, e ainda assim *preservar uma perfeita exatidão e certeza*” (T 1.3.1.5, itálico nosso).

Para o Hume do *THN*, a aritmética é uma ciência cujos juízos são certeiros e exatos. Entretanto, a capacidade de usarmos a intuição para observarmos que *2 é menor que 1000* não nos garante com exatidão e certeza a demonstração dessa proposição. A intuição pode ser usada na prática, de certo modo, mas a demonstração é o que nos garante a exatidão dos juízos desse tipo. No exemplo a aritmética e a álgebra possuem um critério de igualdade, diferentemente da geometria (T 1.3.1.5). Nesse sentido, Hume acredita também que todos os juízos da aritmética podem ser obtidos por demonstração, sejam eles complexos (como o exemplo dado acima de uma conhecida propriedade de limites) ou não complexos (como a proposição '*2 é menor que 1000'*).

No início deste trabalho e dessa seção, apresentei e reforcei, respectivamente, a interpretação da obra de Hume que vincula a aritmética ao domínio das *relações de ideias,* as quais são demonstrativamente e rigorosamente certas. É hora de contrapor essa visão com a que foi apresentada agora, tomando como base o que Atkinson alega e o que Hume afirmou no *THN*. Recapitulando: enquanto Hume divide a aritmética e a álgebra como ciências exatas e a geometria como uma ciência de "menor exatidão" no *THN*, no *EHU* essas três ciências são tratadas como relações de ideias e exatas na mesma medida. Nesse sentido, Atkinson (1960, p. 133) argumenta que existem três razões para admitirmos que Hume não muda a sua ideia quanto a matemática, isto é, que ele mantém a sua posição de que os juízos da matemática continuam sendo mais amplos e não somente analíticos a priori no sentido kantiano. As razões são as seguintes:

(1) O tratamento dos juízos matemáticos no *EHU* parece ser mais simplificado em relação a abordagem oferecida por Hume no *THN.*
(2) No *EHU* parece que é possível argumentar que a noção de *contradição* não é meramente formal no sentido das demonstrações. Mas ela também abarca a noção de que algo é contraditório como algo que não pode ser concedido por uma ideia distinta.
(3) Ainda no mesmo livro e também no *THN*, Hume traça uma distinção entre juízo matemático e analítico.

Aqui pretendo a princípio apresentar razões contrárias às duas primeiras justificativas e mencionarei essas razões numericamente a seguir. Minha intenção é sustentar que é possível interpretarmos David Hume como um filósofo que considera os juízos matemáticos como relações de ideia no sentido *analítico a priori.* A razão (1) não parece se fundar em algo sólido. Primeiramente, do fato de que na obra *EHU* David Hume simplifica o seu pensamento apresentado no *THN* não se segue uma justificativa para admitir que ele tenha mudado ou não a sua opinião. Ainda que ele tenha alterado a sua visão sobre a geometria, classificando-a no trabalho futuro como uma ciência exata, não mais como imprecisa, o que nos interessa aqui é que ele mantém sua posição a respeito da aritmética. Ele a chama tanto de uma *ciência de perfeita exatidão e certeza* no *THN* quanto de *relação de ideia a qual não se pode conceber falsidade* no *EHU.* O que pode ser discutido no trabalho de Atkinson (1960) é a questão da geometria, como ele bem faz, mas não sobre a aritmética. De qualquer maneira, a primeira justificativa em nada contribui para contrariar que a aritmética e a álgebra alteram a categoria de juízo a qual são atribuídas. Para sustentar a razão (2), o seguinte trecho é apresentado por Atkinson (1960: 133):

> […] questões de fato e de existências são evidentemente incapazes de demonstração. […] O caso é diferente com as ciências propriamente ditas. Nelas, toda proposição que não é verdadeira é confusa e ininteligível. Que a raiz cúbica de 64 é igual à metade de 10 é uma proposição falsa e não pode jamais ser distintamente concebida. Mas que César, ou o arcanjo Gabriel, ou outro ser qualquer jamais tenha existido, pode ser uma proposição falsa, mas é ainda assim perfeitamente concebível e não implica nenhuma contradição (EHU 12.3.28.).

Ele argumenta que Hume, na verdade, usa o termo *contradição* em dois sentidos. A palavra *contradição* é utilizada tanto no sentido *formal*, como quando presumimos que '*2+2 ≠ 4'* ou se tentamos supor algo que não é concebível, como um *círculo quadrado.* Esse segundo sentido refere-se ao que Hume chama de ideia nebulosa ou não é distinta. O termo contradição é utilizado por David Hume nos dois sentidos e mesmo às proposições da aritmética cabe a contradição formal e a contradição de ideia (uma ideia a qual não pode ser concebida). Podemos, contudo, distinguir essas contradições do seguinte modo: as contradições formais referem-se aos juízos da aritmética e as contradições de ideias servem aos juízos da geometria. Assim a justificativa de Atkinson pode ser . Sendo a geometria empírica, isto é, as ideias geométricas e dos objetos da geometria são dados pela nossa sensibilidade, não poderíamos ter ideias inconcebíveis como *círculos quadrados*. Por outro lado, se supusermos que '1 ≠ 1', lidamos com uma contradição formal nos termos apresentados acima.

Recapitulando: abordei aqui duas interpretações da filosofia humeana em relação aos juízos da aritmética. Dentre as duas interpretações, defendo a interpretação de que os juízos da matemática são relações de ideias ou que pelo menos os juízos da aritmética, mas não os da geometria, são relações de ideias. Entendo que não há uma diferença substancial entre como Hume classifica os juízos matemáticos no *THN* e depois no *EHU*. O que defendo aqui, em outros termos, é que a analiticidade da aritmética segue intacta nas obras de Hume. Os juízos aritméticos são considerados demonstráveis por meio da suposição de que são falsos, acarretando o que chamamos de *contradições formais*. Resta agora apresentar o pensamento de Frege em relação aos juízos matemáticos, em particular, aos juízos da aritmética.

3. FREGE, LOGICISMO E AS VERDADES ARITMÉTICAS

Apresentadas as interpretações de Hume no que tange os juízos aritméticos, procurarei agora tratar do segundo objetivo proposto, o de mostrar que há pontos em comum entre o pensamento de Frege e o pensamento de Hume. Nesta seção, apresentarei brevemente o que é o logicismo,[5] dando ênfase ao fato de que, para Frege, a aritmética precisa ser analítica no sentido de ser justificada *a priori.* Para que a aritmética seja considerada puramente analítica, ela precisaria ser justificada sem recorrer à experiência. E nesse ponto, Hume e Frege parecem concordar.

Farei uso do trabalho de Frege intitulado *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884), introduzida da seguinte maneira:

> A maior parte dos próprios matemáticos não estará preparada para oferecer uma resposta satisfatória a tais questões [sobre o que é o número]. Ora, não é vergonhoso para a ciência [da matemática] estar tão pouco esclarecida acerca de seu objeto mais próximo, [o número], e aparentemente tão simples? Tanto menos poder-se-á dizer o que seja número. Quando um conceito que serve de base a uma importante ciência oferece dificuldades, torna-se tarefa irrecusável investigá-lo de modo mais preciso e superar estas dificuldades […] (Frege, 1983, p. 200).

De fato, um dos objetivos de Frege na obra é definir o que é o número. Contudo, ele se depara, em muitas discussões, com as abordagens empiristas de John Stuart Mill sobre os números e, em particular, com Immanuel Kant e as categorias do conhecimento. Esse debate que envolve as posições de Frege e Kant gira em torno da seguinte questão: a que categoria pertencem os juízos da aritmética e os da geometria? Kant defende que a matemática é *sintética a priori*, enquanto Frege sustenta que a aritmética é *analítica*. Gostaria de mostrar que a argumentação de Frege sobre os juízos da aritmética está de acordo com o pensamento humeano, isto é, que ambos consideram a aritmética como relações de ideias que ambos pensam que os juízos da aritmética se baseiam, se fundam e

[5] O logicismo é uma corrente filosófica que surge a partir das obras de Frege. A tese central dessa corrente de pensamento é que a aritmética se reduz à lógica, que as verdades da aritmética são somente leis lógicas e que os juízos da aritmética são *analíticos.*

justificam nas operações do pensamento . A interpretação da distinção sintético-analítica dos juízos de Kant é alterada por Frege.[6]

Rigorosamente falando, essa alteração aponta que não é o conteúdo dos juízos que encaixa em alguma das categorias analítico-sintéticas, mas à justificabilidade deles (Frege, 1983, p. 206, §3). Quando Frege torna a *justificabilidade* domínio da investigação, ele se afasta de uma posição psicológica, àquela que afirma que os juízos aritméticos são puramente operações do pensamento, e toma a verdade da justificação de um juízo como critério da distinção analítico-sintética. Em outros termos, a análise dos juízos não é realizada pelos seus conteúdos, mas pelas suas justificativas. Essa mudança metodológica considera juízos analíticos aqueles cuja justificativa advém somente de leis gerais e definições (Frege, 1983, p. 207, §3). Um juízo a priori é aquele demonstrado por leis admitidas sem necessidade de provas (axiomas, por exemplo). Por outro lado, ao nos depararmos com verdades não-lógicas durante uma demonstração de um juízo, este será sintético. Para que seja um juízo *a posteriori,* a justificativa deve apelar às questões de fato – aquelas verdades indemonstráveis as quais Hume aponta em sua obra, como “o sol nascerá amanhã”. Nesse contexto, as verdades aritméticas tornam-se analíticas, dado que poderíamos justificar, segundo Frege, as proposições matemáticas somente por meio da lógica e de leis gerais.

A discordância de Frege em relação a Kant surge no cerne do logicismo: o primeiro não defende que a aritmética seja reduzida somente a demonstrações ou verificações *a posteriori* a partir das intuições do que compreendemos como número, mas que ela seja demonstrada de modo rigoroso sem a necessidade de recorrer às concepções *a posteriori*. Aceitar que a aritmética é fundamentada também em justificações *a posteriori* iria contra o plano central de Frege. A partir das respostas negativas d aos empiristas, sobre a possibilidade dos números ou leis aritméticas participarem do mundo, Frege (1983, p. 215, §12) expõe que as leis da aritmética não podem ser dadas *a posteriori*, e portanto, restariam duas alternativas: ou tais leis são juízos *analíticos a priori* ou *sintéticos a priori.* A discordância com Kant surge nesse ponto. Se a aritmética for *sintética a priori*, significa que precisamos recorrer às nossas intuições sempre que formos provar suas leis gerais, destituindo da aritmética a sua necessidade de ser verdadeira. Em outras palavras, o plano

[6] Segundo Frege (1983, p. 206), ele não pretende trazer um novo sentido a esses conceitos, mas captar o que outros autores tentaram sustentar.

logicista deve ir contra essa posição de considerar a aritmética composta por juízos *sintéticos a priori*.

O obstáculo nesse contexto é o papel da intuição na aritmética segundo Kant, por isso, Frege ataca esse conceito. Como bem aponta Giarolo (2012, p. 32), não há como ter uma aritmética analítica a priori e ao mesmo tempo termos de recorrer às nossas intuições de número *7* e *5* para provarmos que a proposição '*7 + 5 = 12*' é verdadeira. Para provarmos que as verdades da aritmética são analíticas bastaria, portanto, que demonstrássemos a partir de leis gerais que são admitidas sem prova. Não abordarei isso com profundidade no presente artigo, mas as leis lógicas gerais as quais Frege aponta como sendo aquelas que derivam da aritmética são apresentadas preliminarmente na obra *Begriffsschrift* (1879), na qual Frege constrói a conhecida lógica de primeira ordem.

Garantindo que a aritmética é analítica no sentido de ser *justificada* sem o apelo à experiência, temos indícios suficientes para apontar que Hume e Frege concordariam parcialmente acerca da problemática apresentada. O que pretendo fazer a seguir é mostrar como podemos considerar a aritmética como *relações de ideias* que podem ser justificadas analiticamente por meio das operações da mente.

4. A RELAÇÃO ENTRE FREGE E HUME

A partir da exposição nas últimas duas seções, acredito que é possível finalmente afirmar que (1) a aritmética na filosofia humeana é analítica porque os seus juízos são *demonstrativamente certos* e são validados pela simples operação do pensamento. Da mesma forma, acredito que é possível afirmar que para Frege, (2) a aritmética é analítica na medida em que pode ser demonstrada e validada por meio de leis lógicas admitidas sem esbarrar em recorrências à experiência ou à intuições. Logo, de (1) e (2), podemos dizer que (3) a visão de ambos pode ser compatibilizada na medida em que os juízos aritméticos são validados e demonstrados por meio de leis lógicas gerais das operações de pensamento. Em resumo: Hume e Frege concordariam que a aritmética pode ser sustentada somente pelas operações do pensamento e pelas leis lógicas gerais. Os juízos da matemática, especialmente os da aritmética, seriam frutos de demonstrações rigorosas e certeiras. Apresentarei maiores detalhes sobre cada uma das três afirmações acima nos parágrafos seguintes.

Parece haver outras evidências para sustentar (1) além das que já apresentei aqui. No *EHU*, Hume nos fornece um critério para descobrirmos se determinado juízo é uma *questão de fato* (juízo *a posteriori*) ou se é uma *relação de ideias* (juízo *analítico*):

> Do primeiro tipo [relações de ideias], são as ciências da geometria, álgebra e aritmética, e, em suma, toda afirmação que é intuitiva ou *demonstrativamente certa*. […] Proposições desse tipo podem ser descobertas pela simples operação do pensamento, *independentemente* do que possa existir em qualquer parte do universo (EHU 4.1.1, itálico nosso).

Nesse trecho, destaco duas afirmações que nos ajudam na compatibilização do pensamento humeano e fregeano: a de que as verdades das relações de ideias seriam certas e exatas, independentemente da existência ou não de um triângulo na natureza, as afirmações acerca de um triângulo, na medida em que são relações de ideias, são demonstrativamente certas. Em relação à primeira afirmação, podemos estender o raciocínio que foi apresentado para operações mais básicas como, por exemplo, 2 + 2 = 4. Considera-se que, de modo análogo, esse juízo é verdadeiro independentemente da existência ou não do número dois ou do número quatro no mundo exterior. No que diz respeito à segunda afirmação, negar esse juízo matemático implicaria em uma contradição (EHU 4.1.2). Os juízos matemáticos são certos na medida em que são demonstrativamente corretos ou bem *justificados*, no sentido que determinamos aqui.

Percebemos que Hume recorre à *justificabilidade* das proposições aritméticas para a sua categorização. Ora, se supusermos que *dois é igual a um*, chegamos a uma contradição evidente por razões demonstráveis. É, portanto, na justificação dos juízos que se encontra a analiticidade da matemática em David Hume. Ele estaria de acordo com Frege nesse sentido. Se as afirmações acima estiverem corretas, então podemos traçar dois pontos em comum entre a filosofia humeana e a fregeana. Para ambos, a aritmética é analítica quanto a sua justificabilidade. Enquanto a aritmética for demonstrativamente correta a partir de leis lógicas gerais e a negação de teoremas da matemática implicar em contradições, a aritmética seguirá sendo analítica segundo Frege e Hume.

Essa é a posição que sustenta uma possível compatibilização entre os dois filósofos. Desde que seja verdade que é a justificabilidade dos juízos da aritmética o que os torna *analíticos a priori,* e nisso Hume e Frege concordam, o primeiro argumentando pela via das operações da mente, e o segundo pela via das leis lógicas gerais, ambos rejeitam a categoria *sintética a priori* da aritmética que Kant atribui na obra *Prolegomena*.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho tentei defender uma abordagem compatibilista entre as considerações de Hume e as de Frege sobre os juízos da aritmética. Apresentei, à luz de algumas passagens das obras de Hume, uma perspectiva diferente sobre como esses juízos são considerados na literatura.

Contestei a interpretação oferecida por Atkinson em artigo *Hume on Mathematics* (1960), para quem há uma contradição aparente em David Hume e sua consideração sobre as categorias dos juízos da aritmética. Mostrei uma alternativa segundo a qual as contradições formais se diferenciam das contradições que chamamos de contradições de ideias, argumentei que as primeiras contradições devem nos fornecer critérios para os juízos da aritmética, ao passo que as segundas precisam nos fornecer critérios para juízos da geometria. Nesse sentido, considerei também que David Hume classifica os juízos da aritmética como àqueles que são demonstrativamente certos, ou aqueles cujas negações implicam em contradições formais, no sentido aqui apresentado.

Com essas considerações, apresentei brevemente a posição de Frege sobre os juízos da aritmética e como ele os considera *analíticos* no sentido de sua justificabilidade em resposta à Kant, que atribui um caráter *sintético a priori* a esses juízos. Mostrei que Frege critica a posição kantiana, segundo a qual as proposições da matemática devem sempre ser verificadas por meio da recorrência à intuição. Também apresentei as objeções contra a recorrência à sensibilidade para verificação dos juízos matemáticos.

Em vista disso, considero que há pontos em comum entre o pensamento fregeano e o pensamento humeano. Ademais, pode ser que Frege tenha sido influenciado pelo próprio Hume no seu plano logicista. Ainda assim, mesmo que essa influência não tenha ocorrido, essa investigação aponta para uma exegese ainda não presente na filosofia. Em primeiro lugar, ambos classificam os juízos matemáticos como juízos analíticos quanto à sua justificação. Sabemos que os juízos matemáticos são aqueles demonstrativamente certos, como a proposição "três vezes cinco é igual à metade de trinta" (EHU 4.1.1). Para Frege (1983, p. 206-207), com o critério de *justificabilidade* definido, importa encontrarmos a demonstração de uma proposição matemática e chegar até as verdades lógicas mais primitivas que nos garantem que essa demonstração é correta. Nesse sentido, o pensamento humeano e o fregeano se conectam ao considerar a *demonstrabilidade* ou *justificabilidade* como critério para categorizar os juízos aritméticos.

Em segundo lugar, parece que Hume e Frege supõem que os juízos analíticos são verdadeiros independentemente da existência empírica ou não de algo como os números ou as formas geométricas. Não abordei este ponto detalhadamente, mas a passagem a seguir é uma boa evidência da posição de Hume a esse respeito: "mesmo que jamais houvesse existido um círculo ou triângulo na natureza, as verdades demonstradas por Euclides conservariam para sempre sua certeza e evidência" (EHU 4.1.1). Por sua vez, Frege conclui que "[…] o número nem é espacial e físico, como os aglomerados de pedrinhas e bolinhas de Mill, nem tampouco subjetivo como representações, mas *não-sensível e objetivo*" (Frege, 1983, p. 227, §27).

Em terceiro lugar, embora não tenha abordado a geometria em detalhes neste artigo, espero em trabalhos futuros poder desenvolver uma análise sobre as considerações de Hume, Kant e Frege acerca da geometria. O tópico é mais amplo e complexo do que o referente à aritmética, o que me afastaria do objetivo proposto neste artigo.

Mediante o exposto, acredito ter cumprido os dois objetivos apresentados no início: o de apresentar uma interpretação alternativa em relação aos juízos analíticos nas obras de Hume e expor alguns pontos em comum entre as abordagens de Hume e as de Frege. Muito embora Hume tenha voltado muito pouco sua atenção para a aritmética em suas obras, o que torna a literatura sobre esse assunto escassa, acredito ter contribuído para uma interpretação alternativa àquela defendida por Atkinson (1960), que alega a existência de uma inconsistência no pensamento humeano entre a abordagem sobre o assunto apresentadas no *Tratado da natureza humana* e a abordagem apresentada na *Investigação sobre o entendimento humano.* Por fim, julgo ter apresentado justificativas razoáveis para defender a interpretação de uma aritmética analítica nas obras de Hume e também ter mostrado como essa posição está de acordo com a abordagem sobre os juízos da aritmética oferecida por Frege.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ATKINSON, R. F. 1960. "Hume on Mathematics". *The Philosophical Quarterly*. Volume X, número 39, pp. 127-137.

FREGE, G. 1983. *Os Fundamentos da Aritmética.* Luís H. dos Santos (Tradutor). São Paulo: Editora Abril Cultural.

GIAROLO, K. A. 2012. "A Crítica de Frege à Concepção Kantiana de Sinteticidade da Aritmética". *Existência e Arte – Revista Eletrônica do Grupo PET – Ciências*

Humanas, Estética, Universidade Federal de São João Del-Rei. Volume VII, número 7, pp. 24-35.

HUME, D. 2004. *Investigações sobre o entendimento humano e sobre os princípios da moral*. José Oscar de Almeida Marques (Tradutor). São Paulo: Editora UNESP.

______. 2009. *Tratado da natureza humana: uma tentativa de introduzir o método experimental de raciocínio nos assuntos morais*. Déborah Danowski (Tradutora). 2a ed. São Paulo (SP): Ed. UNESP.

KANT, I. 1988. *Prolegômenos a toda Metafísica Futura*. Lisboa: Edições 70.